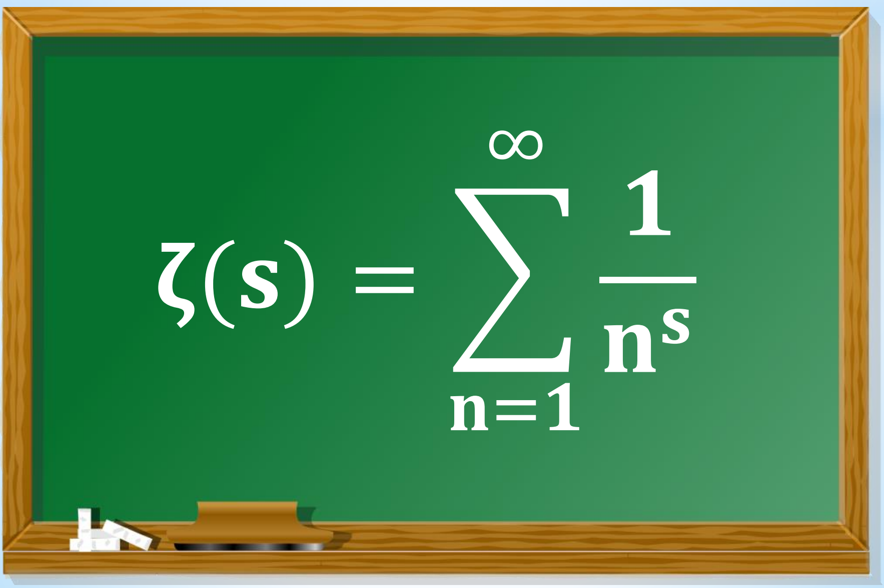
Matemática Divertida

Triângulos Mágicos



Prefácio

Comecei a escrever esta série de livros intitulada “Matemática Divertida”, pois acredito que a matemática possa ser um agente de mudanças sociais. O conhecimento de teorias, e o desenvolvimento do raciocínio matemático podem influenciar positivamente desde crianças até mesmo adultos. Este conhecimento aumenta a segurança e a auto confiança da pessoa, além de ser algo muito divertido de estudar. Este é o segundo livro da série “Matemática Divertida”, o nome deste volume é “Triângulos Mágicos”. Neste volume vamos falar sobre este ente matemático, triângulos mágicos e sobre algumas de suas propriedades.

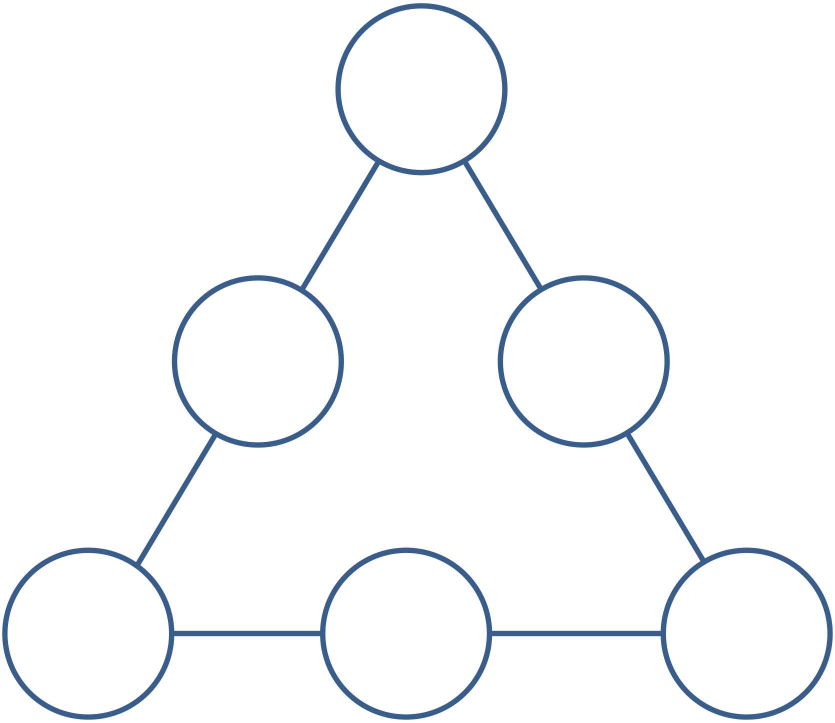
Autor: Osvaldo Luiz dos Santos pereira
Contato: osvald23@gmail.com

O que são triângulos mágicos, e quais são suas propriedades?

Autor: Osvaldo Luiz dos Santos Pereira (osvald23@gmail.com)

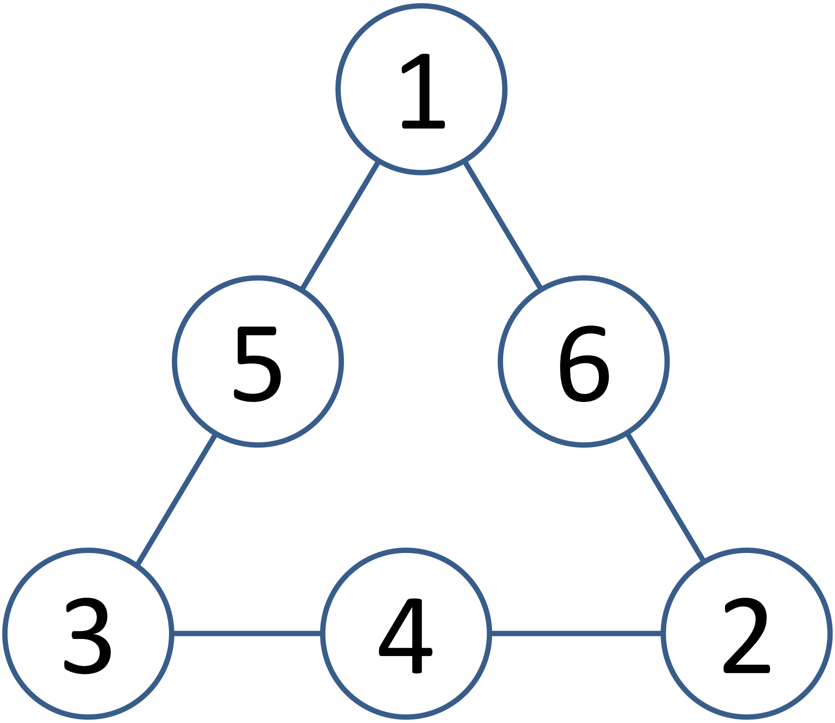
Neste livro da série Matemática Divertida vamos falar sobre triângulos mágicos.

O que é um triângulo mágico?



É um triângulo que possui três ou mais vértices em cada um de seus lados, e a soma de cada lado é sempre a mesma, dado um conjunto de números.

É sempre bom aprendermos com exemplos! Seja o conjunto de números {1, 2, 3, 4, 5, 6}, vamos inserir cada número em um vértice do triângulo abaixo de forma a obtermos sempre a mesma soma em todos os lados.



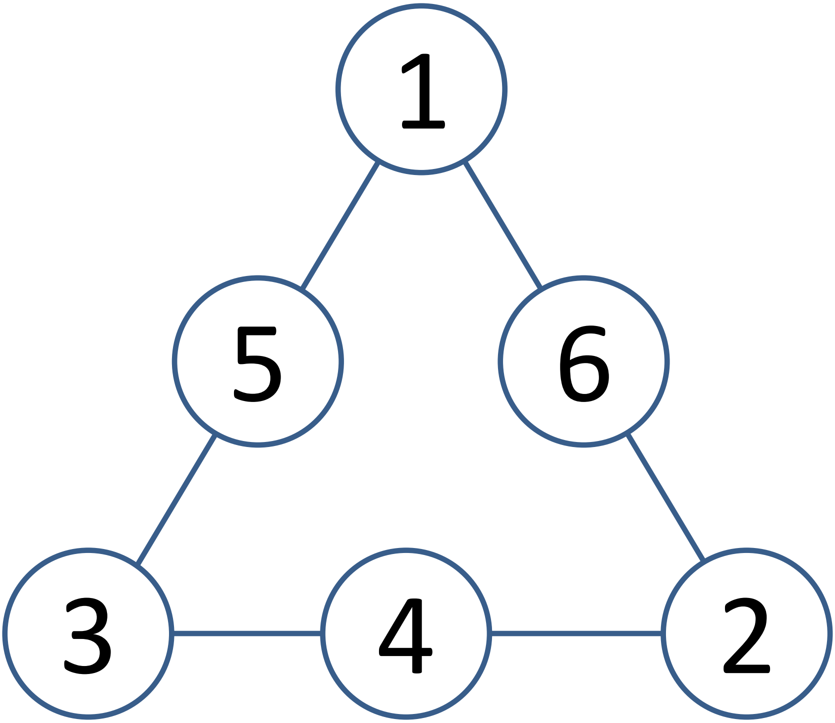
As somas dos lados é sempre igual a 9!

$9 = 1 + 6 + 2$

$9 = 1 + 5 + 3$

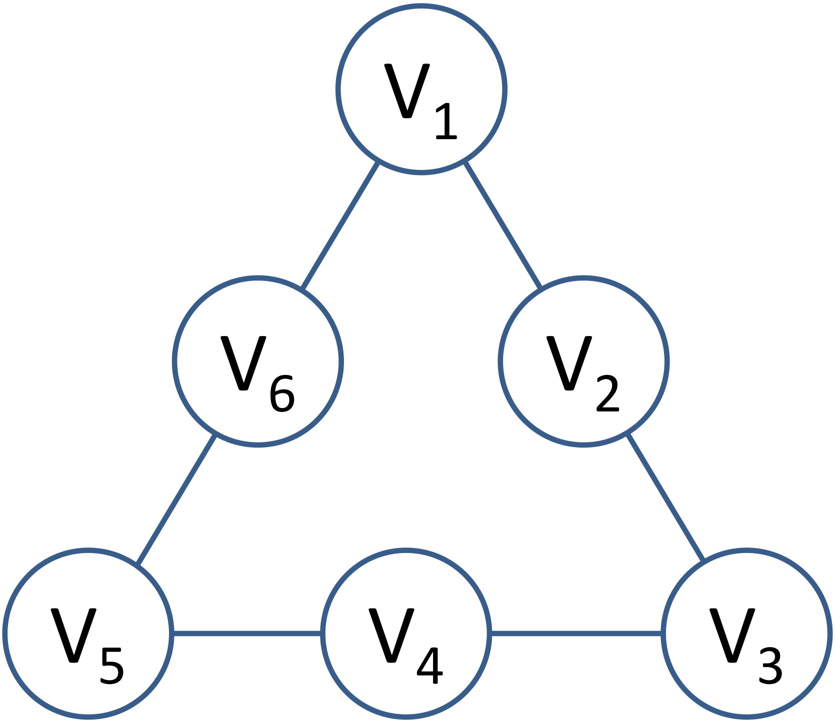
$9 = 3 + 4 + 2$

Vamos falar um pouco sobre notação. O número de vértices (k) em cada lado do triângulo é chamado de ***ordem*** do triângulo mágico. Neste exemplo, a ordem do triângulo mágico é igual a k = 3.



As somas dos lados é chamada de ***soma mágica***. Vamos representar o valor dessa soma pela letra ***S***.

Vamos identificar cada vértice por um número subscrito, ou seja, cada vértice será chamado de V_i , onde i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Ao longo deste livro manteremos sempre a ordem mostrada abaixo.



O motivo pelo qual devemos nomear os vértices é para identificarmos as possíveis soluções do triângulo mágico.

Resumo do que aprendemos até agora:

- A quantidade de números (k) em cada lado do triângulo mágico é chamada de ordem do triângulo.

- A soma (S) de cada lado é chamada de soma mágica.

- Os vértices são nomeados e numerados pela letra V, e pelo subscrito i, que assume os valores de 1 a 6.

- Para que o triângulo seja mágico, os lados do triângulo mágico devem apresentar a mesma soma.

- Cada número deve aparecer em apenas um vértice.

Regras do jogo

Demos um exemplo em que o conjunto de números utilizados para completar os vértices do triângulo mágico são inteiros positivos, consecutivos. Ou seja, usamos o conjunto:

$$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

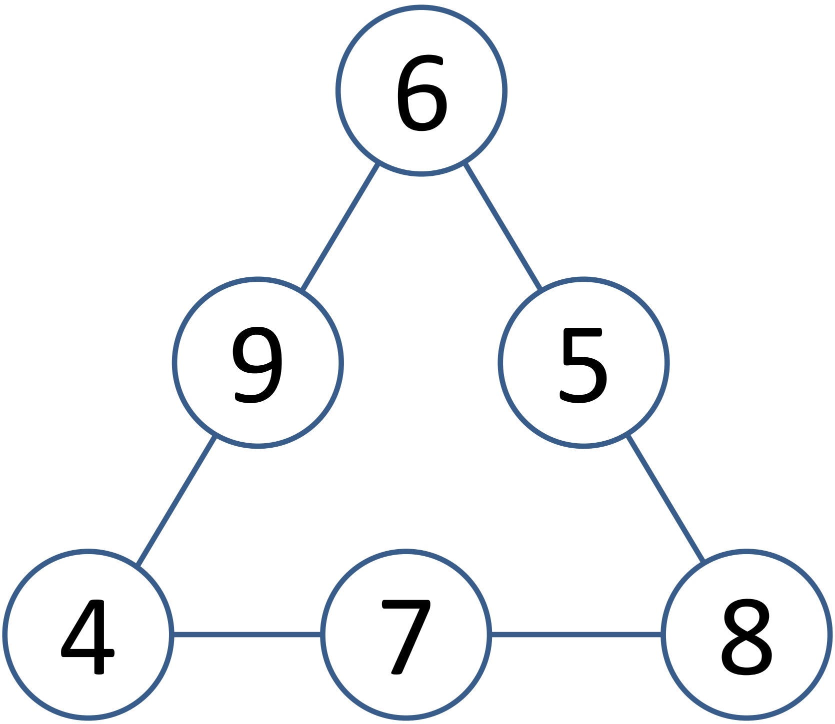
Mas podemos complicar um pouco o jogo. Podemos usar números inteiros negativos, ou podemos usar um conjunto de números que não sejam consecutivos.

Que tal um exemplo?

Exemplo

Vamos utilizar o seguinte conjunto:

$$\Delta = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$



As somas dos lados é sempre igual a 19!

19 = 6 + 9 + 4

19 = 6 + 5 + 8

19 = 8 + 7 + 4

Diversas soluções!

Um triângulo mágico não possui necessariamente apenas uma solução. Vamos utilizar o mesmo conjunto Δ do exemplo anterior para demonstrar essa propriedade:

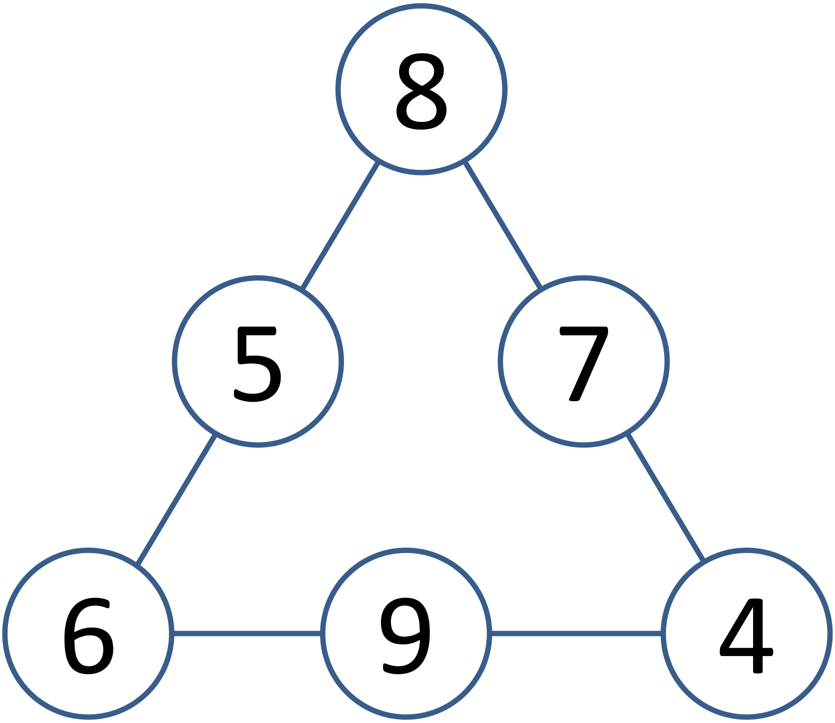
$$\Delta = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Vamos obter o mesmo número mágico, utilizando o mesmo conjunto Δ, porém os números mudarão de vértices. No exemplo anterior tínhamos:

$$V_1 = 6,\ V_2 = 5,\ V_3 = 8$$
$$V_4 = 7,\ V_5 = 4,\ V_6 = 9$$

A solução anterior era:

$$V_1 = 6,\ V_2 = 5,\ V_3 = 8$$
$$V_4 = 7,\ V_5 = 4,\ V_6 = 9$$



Agora é:

$$V_1 = 8,\ V_2 = 7,\ V_3 = 4$$
$$V_4 = 9,\ V_5 = 6,\ V_6 = 5$$

Note que a solução mudou, pois nomeamos cada um dos vértices. Entretanto os números utilizados em cada um dos lados não mudou. A solução anterior era:

$$V_1 = 6,\ V_2 = 5,\ V_3 = 8$$
$$V_4 = 7,\ V_5 = 4,\ V_6 = 9$$

Ou seja, tínhamos a seguinte solução:
19 = 6 + 5 + 8 ou {6, 5, 8}
19 = 8 + 7 + 4 ou {8, 7, 4}
19 = 4 + 9 + 6 ou {4, 9, 6}

Vamos representar essa solução da seguinte maneira:

{{6, 5, 8}, {8, 7, 4}, {4, 9, 6}}

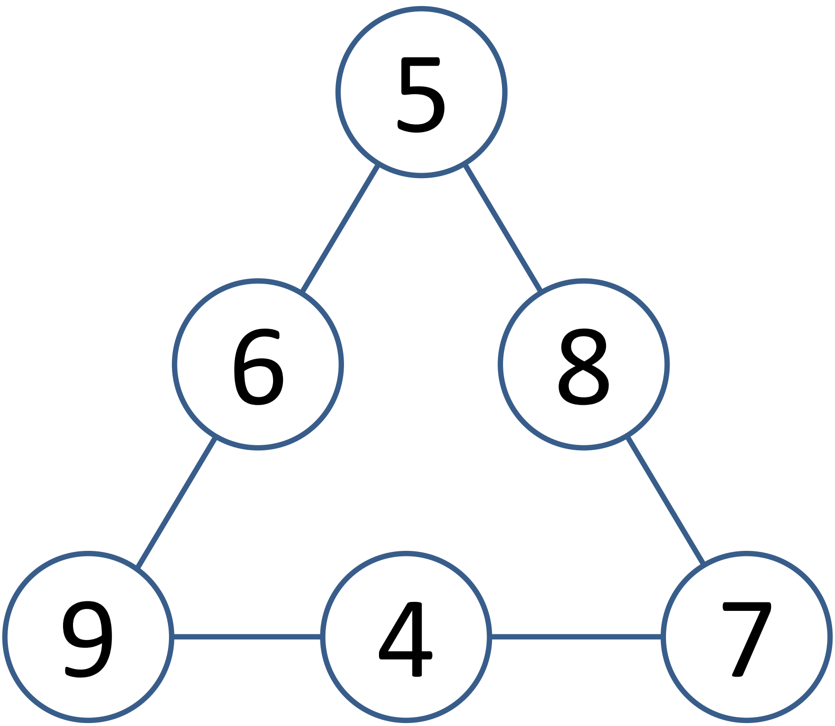
A segunda solução seria:

{{8, 7, 4}, {4, 9, 6}, {6, 5, 8}}

Ou seja, os mesmos conjuntos, mas em ordem diferente. Porém como já foi dito anteriormente, neste livro consideramos as soluções como sendo distintas.

Mais de um número mágico!

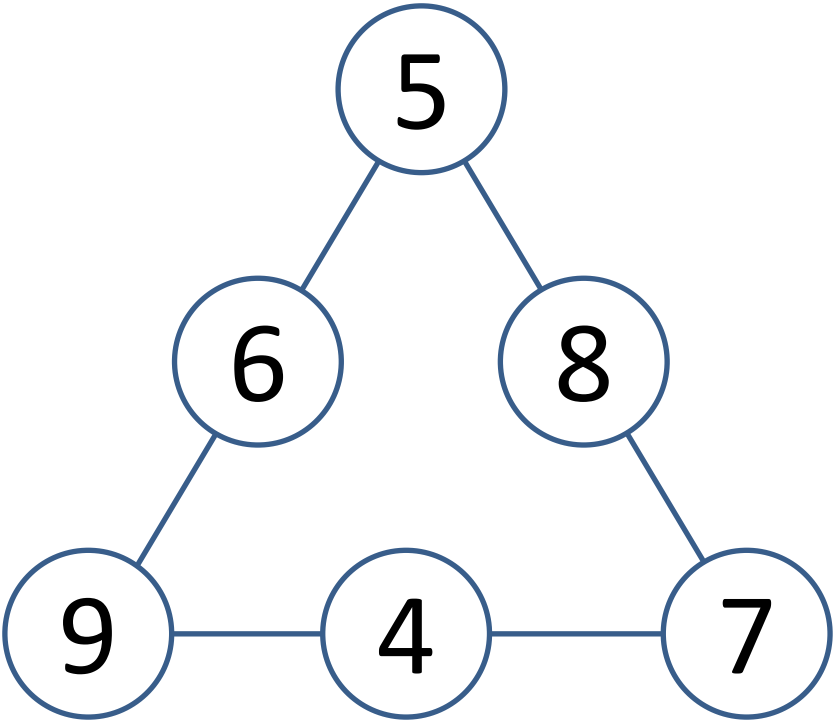
Um triângulo mágico em geral possui mais de um número mágico, e cada número mágico possui mais de uma solução (como vimos anteriormente). Vamos analisar um exemplo?



Como podemos ver, utilizando o mesmo conjunto de números inteiros:

$$\Delta = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Encontramos o número mágico 20!



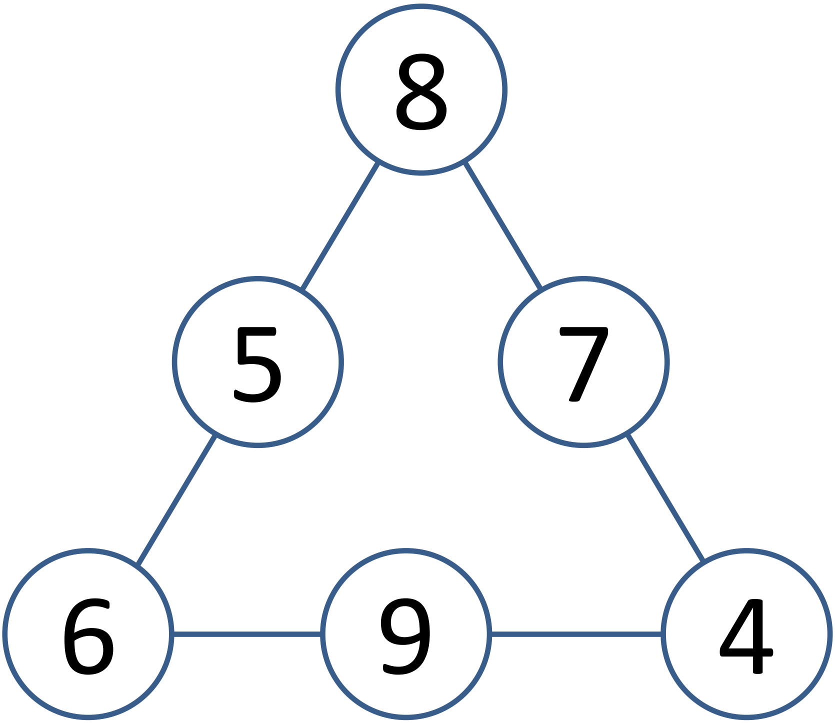
As somas dos lados é sempre igual a 20!

20 = 5 + 8 + 7 ou {5, 6, 8}

20 = 7 + 4 + 9 ou {7, 4, 9}

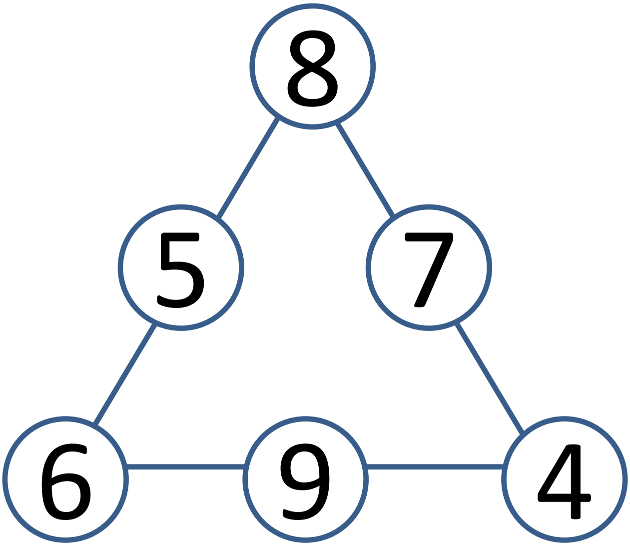
20 = 9 + 6 + 5 ou {9, 6, 5}

Você conseguiu perceber alguma coisa interessante? Olhe novamente para o triângulo com número mágico 19.

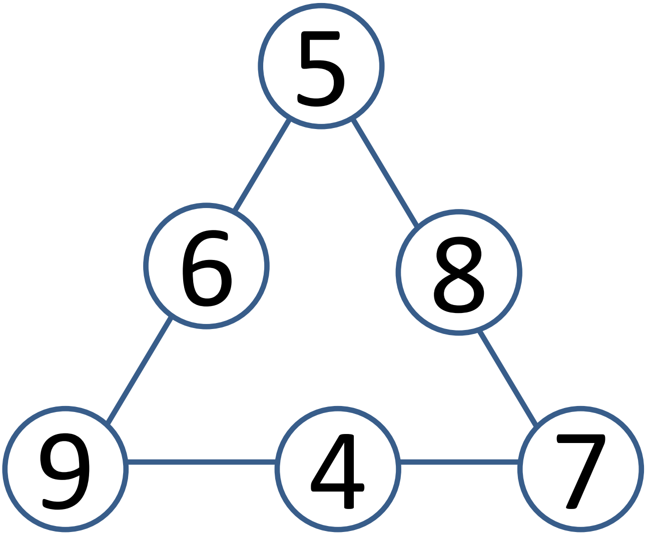


Vamos comparar os dois triângulos, de número mágico 19 e 20. Tente encontrar uma relação entre os números dos vértices entre eles.

Os números do triângulo com soma mágica S = 19 foram deslocados de seus vértices originais para o vértice vizinho, no sentido horário.

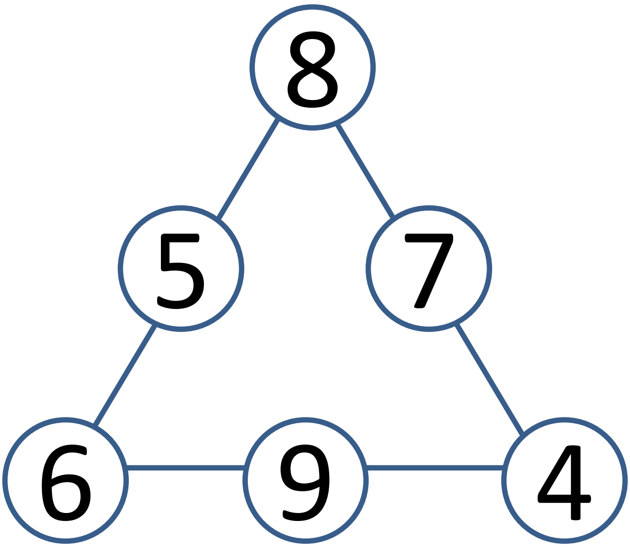


S = 19

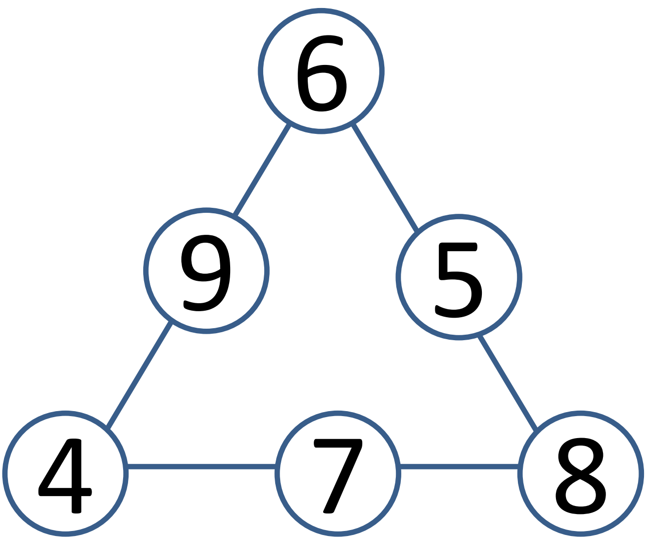


S = 20

Vamos deslocar os números do triângulo com soma mágica (S = 19) em **dois** vértices da posição original e verificar se encontramos outro número mágico?

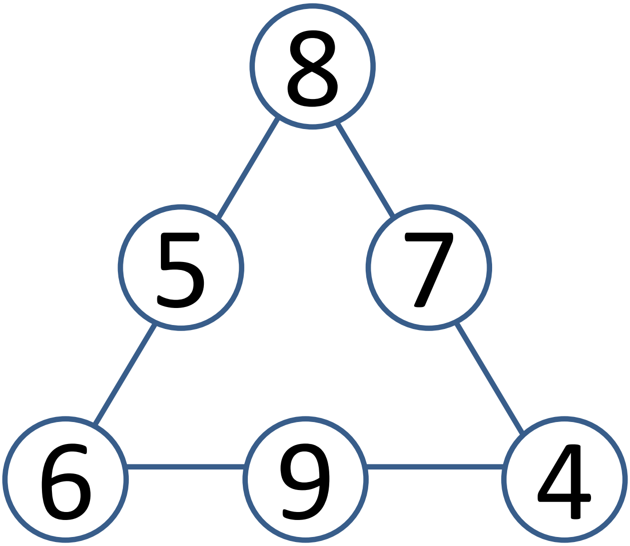


S = 19

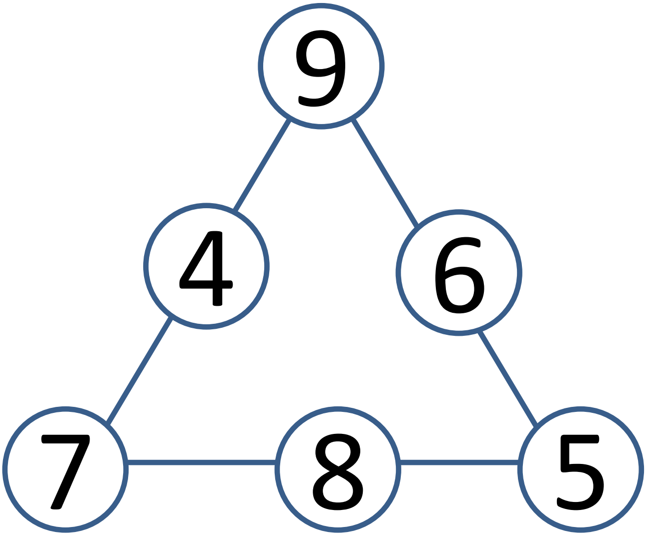


S = 19

Vamos deslocar os números do triângulo com soma mágica (S = 19) em **três** vértices da posição original e verificar se encontramos outro número mágico?



S = 19



S = 20

Vamos recapitular?

Se movermos os números do triângulo mágico com S = 19 em apenas um vértice, obtemos outro triângulo com soma mágica S = 20.

Se movermos os números em dois vértices, obtemos um triângulo diferente, porém com a mesma soma mágica S = 19.

Se movermos os números em três vértices, obtemos um quarto triângulo, porém com soma mágica igual a S = 20.

Obs.: Note que geometricamente falando, mover os números em dois vértices é equivalente a girar o triângulo original no sentido horário!

Triângulos mágicos complementares

A definição de triângulo mágico complementar é a seguinte: Dada uma solução de um triângulo mágico, é possível encontrar um novo triângulo mágico com a seguinte fórmula.

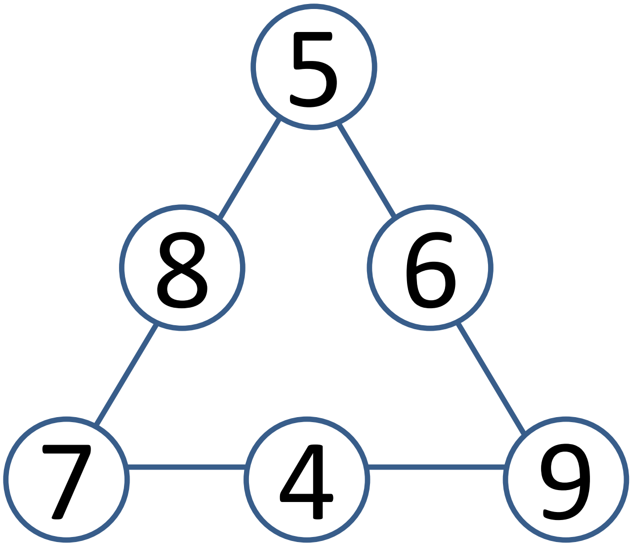
$$V_i' = mínimo + máximo - V_i$$

Os vértices do triângulo foram nomeados lembra? Se chamam V_1, V_2, ..., V_6, dai o V_i na fórmula acima, pois economizamos na explicação. Mínimo é o valor mínimo dos seis números utilizados em cada vértice, máximo é o valor máximo, e V_i são os vértices, como já mencionamos.

É importante frisar que saber lidar com esse tipo de "economia semântica" faz parte do desenvolvimento do raciocínio matemático. Não se preocupe, vamos exemplificar!

O triângulo mágico abaixo possui os seguintes vértices, cuja soma mágica é igual a 20:

$$V_1 = 5, \; V_2 = 6, \; V_3 = 9$$
$$V_4 = 4, \; V_5 = 7, \; V_6 = 8$$



Agora vamos aplicar a fórmula para descobrir os novos valores dos vértices do novo triângulo mágico. Note que o valor máximo é igual a 9 e o valor mínimo é igual a 4 para este triângulo mágico!

O vértice 1 do triângulo mágico é igual a 5. Para calcular o novo vértice 1 do novo triângulo mágico, vamos aplicar a fórmula.

$$V_i{}' = mínimo + máximo - V_i$$

Como a soma máximo + mínimo é sempre constante, vamos simplificar a fórmula, o máximo é 9 e o mínimo é 4, logo

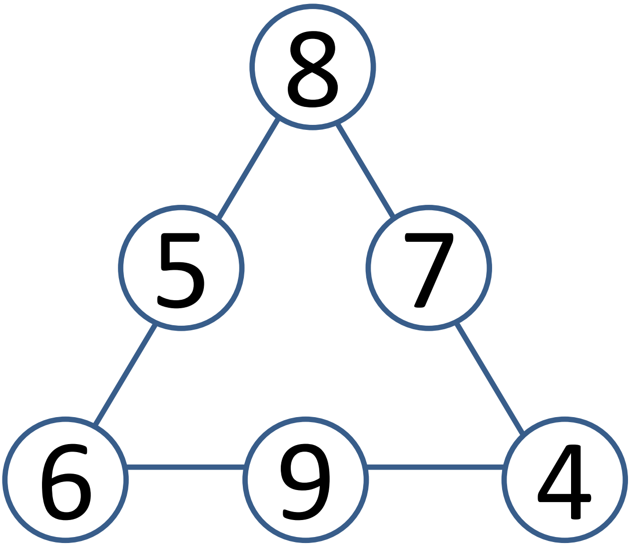
$$V_i{}' = 13 - V_i$$

Os novos vértice são:

$$V_1' = 13 - V_1 = 13 - 5 = 8$$
$$V_2' = 13 - V_2 = 13 - 6 = 7$$
$$V_3' = 13 - V_3 = 13 - 9 = 4$$
$$V_4' = 13 - V_4 = 13 - 4 = 9$$
$$V_5' = 13 - V_5 = 13 - 7 = 6$$
$$V_6' = 13 - V_6 = 13 - 8 = 5$$

Agora que calculamos os novos vértices:

$$V'_1 = 8,\ V'_2 = 7,\ V'_3 = 4$$
$$V'_4 = 9,\ V'_5 = 6,\ V'_6 = 5$$



E o triângulo mágico complementar de nosso triângulo mágico original (com soma igual a 20) tem soma mágica igual a 19! Esse resultado é importante, pois nos indica que somente precisamos encontrar metade das soluções, a outra metade sai pela fórmula do triângulo mágico complementar!

Resumo

Para encontrar os vértices do triângulo mágico complementar, que é uma nova solução do triângulo mágico, de um dado triângulo mágico, utilizamos a fórmula abaixo.

$$V_i' = mínimo + máximo - V_i$$

Onde,

- V'_i é o i-ésimo vértice do triângulo mágico complementar.
- V_i é o i-ésimo vértice do triângulo mágico original.
- Mínimo é o valor mínimo dos números utilizados no triângulo mágico.
- Máximo é o valor máximo dos números utilizados no triângulo mágico.

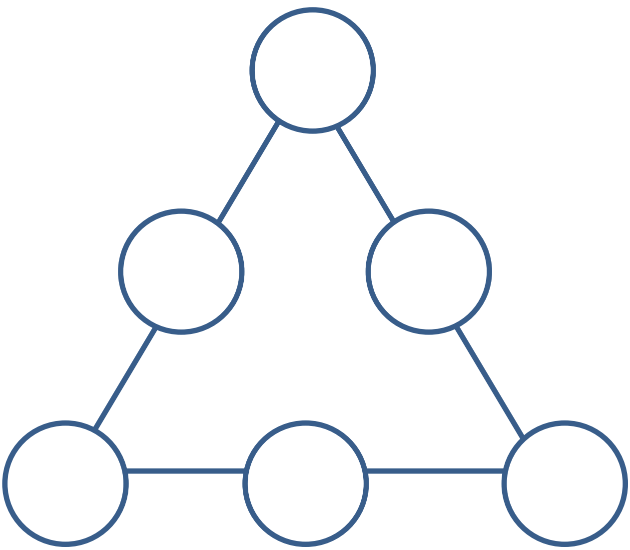
Triângulos mágicos de terceira ordem

Osvaldo Pereira osvald23@gmail.com

Agora que já sabemos o que são triângulos mágicos e aprendemos um pouco sobre suas propriedades, vamos apresentar todas as soluções do triângulo mágico de terceira ordem que possui o seguinte conjunto de números inteiros.

$$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

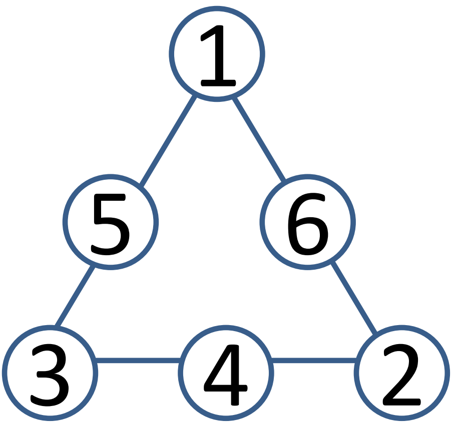
Antes de pular para a próxima página e ver a solução, que tal tentar sozinho?



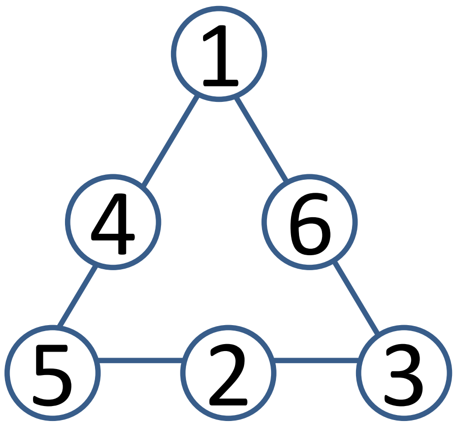
As soluções do triângulo mágico.

$$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

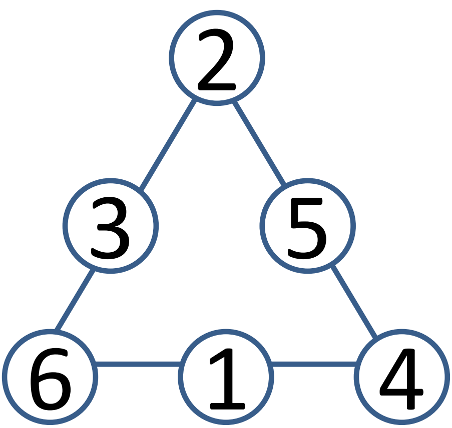
S = 9



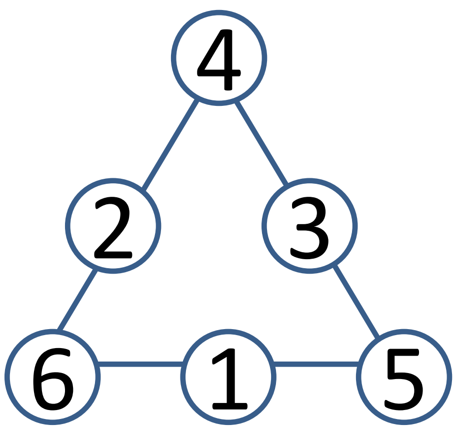
S = 10



S = 11



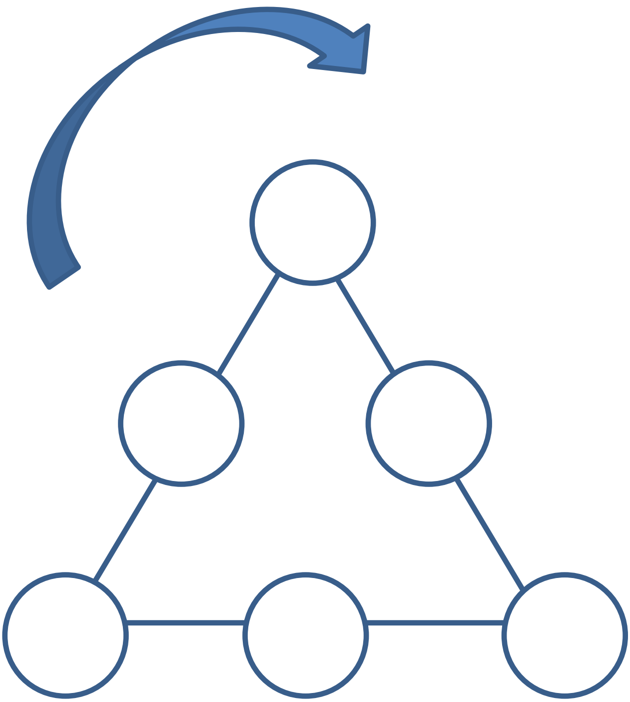
S = 12



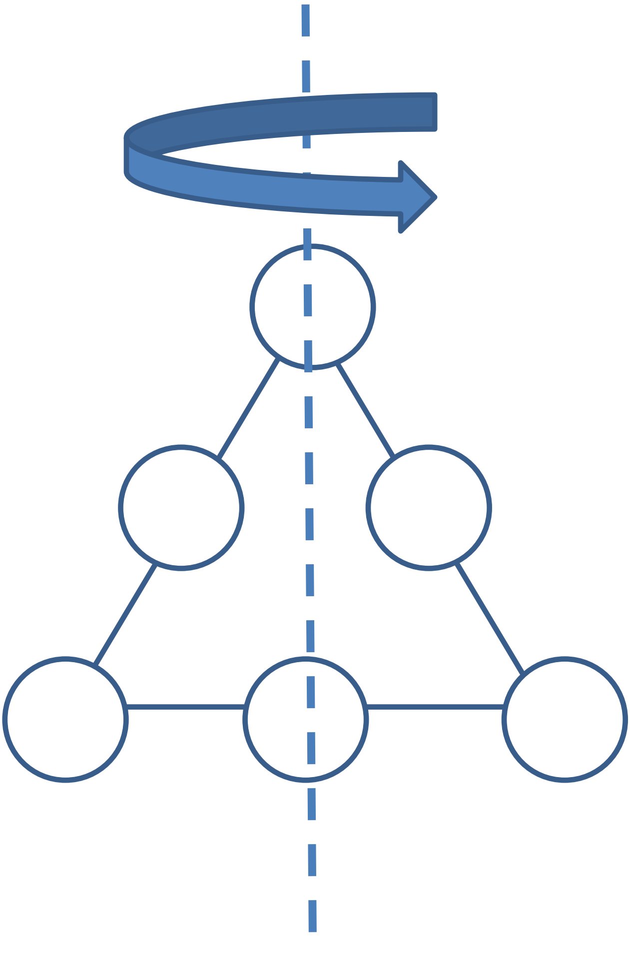
Geometria dos triângulos mágicos de terceira ordem

Osvaldo Pereira osvald23@gmail.com

Experimente brincar com a geometria e as simetrias dos triângulos mágicos que você criar. Mostramos que ao girar um triângulo mágico encontramos outros triângulos mágicos.



Experimente também refletir os triângulos mágicos, como se houvesse um espelho bem em seu centro. O triângulo deve girar em torno do eixo.



Considerações Finais

Procure novos triângulos mágicos, com diferentes conjuntos Δ de números. Explore a geometria dos triângulos, e não esqueça de exercitar a fórmula do triângulo mágico complementar.

Se você gostou deste livro, pode enviar seu feedback com sugestões, dicas, e mesmo correções. Meu e-mail pessoal é o seguinte: osvald23@gmail.com.

Tenho pretensões de escrever um novo livro, mas agora com triângulos mágicos de maiores ordens. E também sobre outros tipos de polígonos mágicos! Até o próximo da Matemática Divertida!